المراجعة النهائية

ملخص أهم قوانين

الرياضيات

الصف الثاني الثانوى

الفصل الدراسى الثاني

منتدى توجيه الرياضيات
أ / عادل إدوار

أولاً : الجبر

المتتابعة

هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص^{+}$ و مجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع (د : $ص^{+} \longrightarrow$ ع)

المتتابعة المنتهية و المتتابعة غير المنتهية

- تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهياً (أى **يمكن حصره أو عده**)
- تكون غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (**عدد لا نهائى من العناصر**)

المتتابعة التزايدية و المتتابعة التناقصية و المتتابعة الثابتة

- المتتابعة التزايدية : $ع_{ن+1} - ع_{ن} >$ الصفر
- المتتابعة التناقصية : $ع_{ن+1} - ع_{ن} <$ الصفر
- المتتابعة الثابتة : $ع_{ن+1} - ع_{ن} =$ الصفر

المتسلسلات و رمز التجميع

الخواص الجبرية للتجميع

إذا كانت $(ع_{ر})$ ، $(ع_{هـ})$ متتابعتين ، ن $\in ص^{+}$ ، حـ $\in$ ع فإن:

① $\sum_{ر=1}^{ن} حـ = حـ\,ن$

② $\sum_{ر=1}^{ن} أ\,ع_{ر} = أ \sum_{ر=1}^{ن} ع_{ر}$

③ $\sum_{ر=1}^{ن} (ع_{ر} \pm ع_{هـ}) = \sum_{ر=1}^{ن} ع_{ر} \pm \sum_{ر=1}^{ن} ع_{هـ}$

④ قانون مجموع الأعداد الصحيحة : $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$

⑤ قانون مجموع مربع الأعداد الصحيحة: $\sum ر^{2} = \frac{ن(ن+1)(2ن+1)}{\ldots}$

المتتابعات الحسابية و الهندسية

	المتتابعة الحسابية	المتتابعة الهندسية
التعريف	تكون المتتابعة $(ع_{ن})$ حسابية إذا كان: $ع_{ن+١} - ع_{ن}$ = ثابت (الأساس)	تكون المتتابعة $(ع_{ن})$ هندسية إذا كان: $\frac{ع_{ن+١}}{ع_{ن}}$ = ثابت (الأساس)
الأساس	ء = أي حد - الحد السابق له مباشرة	$ر = \frac{\text{أي حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$
الصورة العامة	$(ع_{ن}) =$ (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، .... ، ل - ٢ء ، ل - ء ، ل)	$(ع_{ن}) =$ (أ ، أر ، أ$ر^{٢}$ ، .... ، $\frac{ل}{ر^{٢}}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل)
الحد العام	$ع_{ن} = أ + (ن - ١) ء$	$ع_{ن} = أ ر^{ن-١}$
الأوساط	إذا كان : أ ، ب ، حـ في تتابع حسابي فإن : ب يكون وسط حسابي بين أ ، حـ ويكون : ٢ب = أ + حـ أي ب = $\frac{أ + حـ}{٢}$	إذا كان : أ ، ب ، حـ في تتابع هندسي فإن : ب يكون وسط هندسي بين أ ، حـ ويكون : $ب^{٢} = أ \times حـ$ أي $ب = \pm\sqrt{أحـ}$
المجموع	$ح_{ن} = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$ $ح_{ن} = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$	$ح_{ن} = \frac{أ(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$ $ح_{ن} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$

ملاحظات على المتتابعات الحسابية

❶ لإيجاد رتبة أول حد موجب: نضع $ع_{ن} > $ صفر أي : أ + (ن - ١)ء > صفر

❷ لإيجاد رتبة أول حد سالب: نضع $ع_{ن} < $ صفر أي : أ + (ن - ١)ء < صفر

❸ لإيجاد أكبر مجموع نوجد عدد الحدود الموجبة بوضع $ع_{ن} > ٠$ لإيجاد قيمة ن

❹ لإيجاد أصغر مجموع نوجد عدد الحدود السالبة بوضع $ع_{ن} < ٠$ لإيجاد قيمة ن

❺ لإيجاد مجموع المتتابعة بدءً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلاً من أ

❻ لإيجاد قيمة ن التي تجعل المجموع موجباً نضع $ح_{ن} > ٠$ أي : ٢أ + (ن - ١)ء > ٠

❼ لإيجاد قيمة ن التي تجعل المجموع سالباً نضع $ح_{ن} < ٠$ أي : ٢أ + (ن - ١)ء < ٠

❽ لإيجاد قيمة ن التي يتلاشى عندها المجموع نضع $ح_{ن} = ٠$ أي : ٢أ + (ن - ١)ء = ٠

ملاحظات على المتتابعات الهندسية

يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية إذا وفقط إذا كان:

|ر| < ١ أي : -١ < ر < ١ ويكون : $\text{جـ}_\infty = \frac{\text{أ}}{١ - \text{ر}}$

العلاقة بين الوسطين الحسابي والهندسي

نظرية : الوسط الحسابي لعددين حقيقين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسي.

أي انه لأي عددين س ، ص حيث س ، ص ∈ ع^+ ، س ≠ ص

يكون : $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} > \sqrt{\text{س}.\text{ص}}$

أي أن الوسط الحسابي أكبر من الوسط الهندسي الموجب ، ولما كان الوسط الهندسي الموجب أكبر من الوسط الهندسي السالب فإن الوسط الحسابي يكون أكبر من الوسط الهندسي (على الإطلاق).

ملاحظات

- إذا كان س ، ص ، ع ثلاثة أعداد في تتابع حسابي فإن: ص وسط حسابي بين س ، ع
ويكون : ص > $\sqrt{\text{س ع}}$
- إذا كان س ، ص ، ع ثلاثة أعداد في تتابع هندسي فإن: ص وسط هندسي بين س ، ع
ويكون : $\frac{\text{س} + \text{ع}}{٢} > \text{ص}$

مبدأ العد - التباديل - التوافيق

مبدأ العد

إذا أمكن إجراء عمل ما بطرق عددها م ، و عمل آخر بطرق عددها ن ، فإنه يمكن إجراء العملين معاً بطرق عددها م × ن

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب بالصورة : |ن هو يساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الأقل من أو تساوي ن

أي أن : |ن = ن(ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣) × .... × ٣ × ٢ × ١

ملاحظات

☺ عدد عوامل |ن يساوي ن عامل أكبرها ن و أصغرها الواحد الصحيح.

☺ |ن = ن |ن - ١ = ن(ن - ١)|ن - ٢ = ن(ن - ١)(ن - ٢)|ن - ٣

أي أن مضروب العدد = العدد × مضروب (العدد - ١)

☺ |١ = |الصفر = ١ و العكس صحيح إذا كان : |س = ١ فإن س = ٠ أ، ١

☺ يمكن استخدام الحاسبة العلمية لحساب مضروب العدد فمثلا لحساب : |٥

نكتب : 5 shift x^{-1} ($x!$) يظهر لنا على الشاشة " 5! " ثم بالضغط على =

نجد أن الناتج يساوي ١٢٠ (∴ |٥ = ١٢٠)

☺ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء في صف = $\underline{|ن}$

☺ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء في دائرة = $\underline{|(ن - ١)}$

التباديل

يرمز لعدد ن من التباديل المتمايزة مأخوذ منها ر من العناصر في كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$

حيث : $^{ن}ل_{ر}$ = ن (ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)............(ن - ر + ١)

، ر ≤ ن ، ر ∈ ط . ن ∈ $ص^{+}$

ملاحظات

☺ أي أن : $^{ن}ل_{ر}$ تعني حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي عددها ر و أكبرها ن ، و أصغرها (ن - ر + ١)

☺ $^{ن}ل_{ر} = \frac{|ن}{|ن - ر} = \frac{|العلم}{|العلم - الدليل}$

☺ يمكن استخدام الحاسبة العلمية لحساب التباديل فمثلا لحساب : $^{٨}ل_{٣}$

نكتب : 8 shift × 3 يظهر لنا على الشاشة " *8P3* " ثم بالضغط على = نجد أن الناتج يساوي ٣٣٦ (∴ $^{٨}ل_{٣}$ = ٣٣٦)

التوافيق

هي كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها .

أي أن : $^{ن}ق_{ر}$ هو عدد التوافيق المكون كل منها من ر من الأشياء المختارة من بين ن من العناصر حيث ، ر ≤ ن ، ر ∈ ط . ن ∈ $ص^{+}$

ملاحظات

☺ $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|ر} = \frac{|ن}{|(ن - ر) . |ر}$

☺ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن - ر}$ " قانون التبسيط "

☺ إذا كان : $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن : س = ص أ، س + ص = ن

" إذا كان العلم = العلم الدليل فإن إما : الدليل = الدليل أ، مجموع الدليلين = العلم"

☺ يمكن استخدام الحاسبة العلمية لحساب التوافيق فمثلا لحساب : $^{٧}ق_{٢}$

نكتب : 7 shift ÷ 2 يظهر لنا على الشاشة " *7C2* " ثم بالضغط على = نجد أن الناتج يساوي ٢١ (∴ $^{٧}ق_{٢}$ = ٢١)

ثانياً: التفاضل و التكامل

التغير

إذا كانت: ص = د(س) وتغيرت س من س إلى س + هـ فإن ص تتغيراً تبعاً لذلك من د(س) إلى د(س + هـ) وعلى ذلك فإن التغير في ص يكون د(س + هـ) − د(س) والذي يرمز له بالرمز ت(هـ) أي أن :

☺ دالة التغير ت(هـ) = د(س + هـ) − د(س)

☺ دالة متوسط التغير م(هـ) = $\frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س+هـ)-د(س)}{هـ}$

☺ دالة معدل التغير دَ(س) = نهـا هـ←٠ م(هـ) = نهـا هـ←٠ $\frac{د(س+هـ)-د(س)}{هـ}$

تذكر أن

(١) مساحة الدائرة = π نق^٢ ، محيط الدائرة = ٢ π نق

(٢) مساحة المربع = ل^٢ ، محيطه = ٤ ل

(٣) مساحة المستطيل = الطول × العرض ، محيطه = ٢(الطول + العرض)

(٤) مساحة المكعب الكلية = ٦ ل^٢ ، المساحة الجانبية = ٤ ل^٢ ، حجم المكعب = ل^٣

(٥) مساحة الكرة = ٤ π نق^٢ ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^٣

(٦) مساحة المثلث = نصف حاصل ضرب طولي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

الإشتقاق:

إذا كانت ص = د(س)

المشتقة الأولى للدالة د بالنسبة إلى س يرمز لها بأحد الرموز الآتية :

$\frac{ءص}{ءس}$ = صَ = دَ(س) = $\frac{ء}{ءس}$(د(س))

ملاحظة هامة :

المشتقة الأولى لدالة عند نقطة = ميل المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة = ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة = معدل تغير الدالة عند هذه النقطة .

أي أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = صَ = دَ(س) = $\frac{ء}{ءس}$(د(س)) = م = ظا هـ

قابلية الإشتقاق :

يقال أن الدالة " د " قابلة للإشتقاق عند س = ا حيث ا ∈ مجال الدالة " د : إذا و فقط

إذا كانت : $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(ا+هـ)-د(ا)}{هـ}$ (لها وجود)

قابلية للإشتقاق للدالة متعددة التعريف (المشتقة اليمنى و اليسرى)

إذا كانت س = ا نقطة تنتمي لمجال الدالة " د " و كان قاعدة الدالة عند س < ا تختلف عن قاعدتها عند س > ا (في جوار ا). فعند بحث قابلية الإشتقاق عند س = ا يجب بحث المشتقة اليمنى $د'(ا^+)$ ، و المشتقة اليسرى $د'(ا^-)$ والمقارنة بينهما حيث :

$د'(ا^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(ا+هـ)-د(ا)}{هـ}$ ، $د'(ا^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{د(ا+هـ)-د(ا)}{هـ}$

فإذا كان : $د'(ا^+) = د'(ا^-)$ فإن الدالة د تكون قابلة للإشتقاق عند س=ا

ملاحظات:

(١) كل دالة غير متصلة عند نقطة تكون غير قابلة للإشتقاق عند نفس النقطة .

(٢) الدالة المتصلة عند نقطة ليس من الضروري أن تكون قابلة للإشتقاق عند نفس النقطة .أي أن اتصال الدالة عند نقطة شرط ضروري و لكنه غير كاف لقابلية اشتقاق الدالة عند ذات النقطة.

(٣) كل دالة قابلة للإشتقاق عند نقطة تكون متصله عند نفس النقطة .

(٤) إذا كانت الدالة غير قابلة للإشتقاق عند نقطة فإنه ليس من الضروري أن تكون متصلة عند نفس النقطة .

هام جداً :

إذا كانت الدالة د قابلة للإشتقاق عند س=ا فإن :

(١) الدالة متصلة عند س=ا ⟸ $د(ا^-) = د(ا^+) = د(ا)$

(٢) $د'(ا^-) = د'(ا^+)$

♦ قواعد الاشتقاق

(١)إذا كانت ص = ا حيث ا ثابت فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

(٢)إذا كانت ص = ا $س^ن$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ا \times ن\ س^{ن-١}$

(٣) $\frac{ء}{ءس}$ (ص ± ع) = $\frac{ءص}{ءس} \pm \frac{ءع}{ءس}$ (مشتقة مجموع دالتين)

(٤) إذا كانت ص = $\sqrt{د(س)}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢ \times \text{الجذر}}$

(٥) إذا كانت ص = د(س) . ى(س) فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ . ى + د . ىَ

أي أن مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الأولى × الثانية + الأولى × مشتقة الثانية

(٦) إذا كانت ص = $\frac{د(س)}{ى(س)}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{دَ . ى - ىَ . د}{[ى(س)]^{٢}}$

أي أن مشتقة خارج قسمة دالتين

= (مشتقة البسط × المقام - مشتقة المقام × البسط) ÷ مربع المقام

(٧) إذا كانت ص = $[ر(س)]^{ن}$ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ن $[ر(س)]^{ن-١}$ × رَ(س)

أي أن مشتقة $(قوس)^{ن}$ = ن $(القوس)^{ن-١}$ × مشتقة ما بداخل القوس

(٨) إذا كانت : ص = جا[د(س)] : فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ(س) × جتا[د(س)]

(٩) إذا كانت : ص = جتا[د(س)] : فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ(س) × -جا[د(س)]

(١٠) إذا كانت : ص = ظا[د(س)] فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ(س) × $قا^{٢}$[د(س)]

(١١) <u>قاعدة السلسلة</u> : إذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر(س) فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

<u>تذكر أن :</u>

<u>ميل الخط المستقيم :</u>

- م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = ظا هـ
- ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = صفر
- ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات غير معرف = $\frac{١}{\text{صفر}}$
- إذا كان : $ل_{١} // ل_{٢}$ فإن : $م_{١} = م_{٢}$
- إذا كان : $ل_{١} \perp ل_{٢}$ فإن : $م_{١} \times م_{٢} = -١$
- للحصول على نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات : بوضع ص = ٠
- للحصول على نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات : بوضع س = ٠
- للحصول على نقط تقاطع منحنين : نقوم بحل معادلتيهما جبريا

معادلة المماس و العمودي عليه لمنحنى الدالة :

☺ **معادلة المماس :** $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$ حيث $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ نقطة على المماس ، $\text{م} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

☺ **معادلة العمودي :** $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \bar{\text{م}}$ حيث $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ نقطة على العمودي ، $\bar{\text{م}} = - \frac{1}{\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}}$

التكامل

☒ $\int \text{س}^{\text{ن}} \text{ ء س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

☒ $\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}} \text{ ء س} = \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{ث}$

☒ $\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}} \times \text{د}'(\text{س}) \text{ ء س} = \frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

☒ $\int \text{جتا}(\text{أ س} + \text{ب}) \text{ ء س} = \frac{1}{\text{أ}} \text{ جا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

☒ $\int \text{جا}(\text{أ س} + \text{ب}) \text{ ء س} = -\frac{1}{\text{أ}} \text{ جتا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

☒ $\int \text{قا}^2(\text{أ س} + \text{ب}) \text{ ء س} = \frac{1}{\text{أ}} \text{ ظا}(\text{أ س} + \text{ب}) + \text{ث}$

ثالثاً : حساب المثلثات

تذكر أن :

العلاقات الأساسية بين النسب المثلثية

$\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta = 1$ ، $1 + \text{ظا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$ ، $1 + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$

$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$

مقلوبات النسب المثلثية الأساسية :

$\text{قا}\,\theta = \frac{1}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{قتا}\,\theta = \frac{1}{\text{جا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{1}{\text{ظا}\,\theta}$

قاعدة الجيب : في المثلث : أ ب حـ يكون $\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$

قاعدة جيب التمام : $أ^2 = ب^2 + حـ^2 - 2 ب حـ جتا أ$

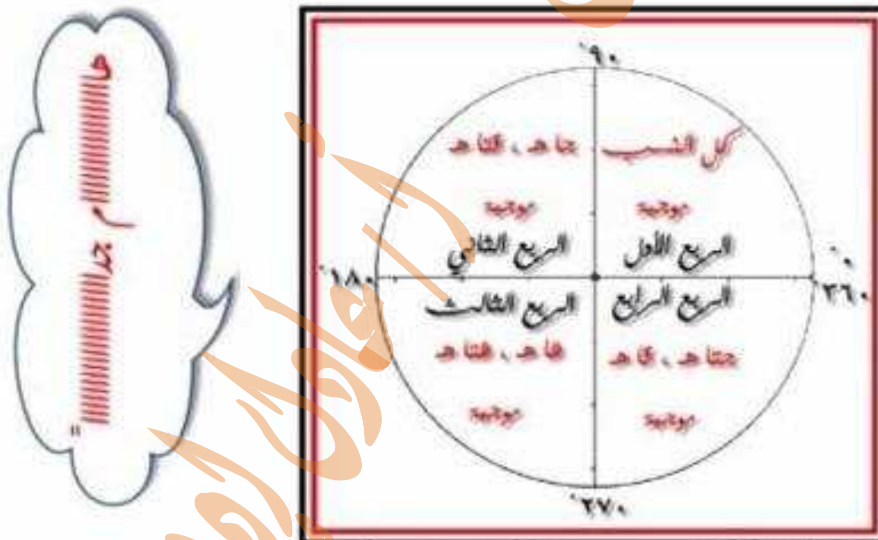
$\therefore جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$

زوايا الإرتفاع و زوايا الانخفاض



إشارات الدوال المثلثية

انظر الشكل التالي:



الدوال المثلثية لمجموع و الفرق بين قياسي زاويتين

$جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب$

$جا(أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب$

$جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب$

$جتا(أ - ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب$

$ظا(أ + ب) = \frac{ظا أ + ظا ب}{1 - ظا أ ظا ب}$ ، $ظا(أ - ب) = \frac{ظا أ - ظا ب}{1 + ظا أ ظا ب}$

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

جا٢أ = ٢جاأ جتاأ

جتا٢أ = جتا^٢ أ − جا^٢ أ = ٢جتا^٢ أ − ١ = ١ − ٢جا^٢ أ

ظا٢أ = ٢ ظاأ / (١ − ظا^٢ أ)

وكذلك يمكن اثبات أن :

جا٤س = ٢جا٢س جتا٢س

، جتا٦ح = جتا^٢ ٣ح − جا^٢ ٣ح = ٢جتا^٢ ٣ح − ١ = ١ − ٢جا^٢ ٣ح

، ظا١٠هـ = ٢ظا٥هـ / (١ − ظا^٢ ٥هـ)

الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية

جا (أ/٢) = ± √((١ − جتاأ) / ٢)

جتا (أ/٢) = ± √((١ + جتاأ) / ٢)

ظا (أ/٢) = ± √((١ − جتاأ) / (١ + جتاأ))

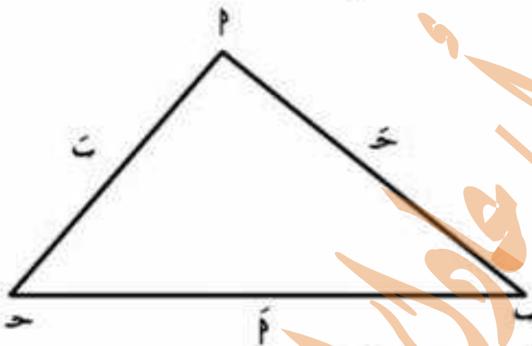
صيغة هيرون لحساب مساحة المثلث

في المثلث أ ب ح : إذا كان نصف محيط المثلث أ ب ح

ع = (أَ + بَ + حَ) / ٢

و تكون مساحة المثلث أ ب ح

Δ = √(ع(ع − أَ)(ع − بَ)(ع − حَ))



طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث

تذكر ان الدائرة الداخلة لمثلث هي الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ، و مركزها هو نقطة تقاطع منصفات زواية الداخلة .

إذا كان إذا كان " ع " نصف محيط المثلث أ ب ح

، " Δ " مساحة المثلث أ ب ح

، نق طول نصف قطر الدائرة الداخلة للمثلث أ ب ح فإن:

نق = Δ / ع

